

Spiegeltje, spiegeltje aan de wand...

Rick van Rein

24 april 2000

Samenvatting

‘Wiskunde is abacadabra’ hoor je heel vaak. Ik ben het niet mee eens; eerder vind ik dat wiskunde vaak slecht wordt gedoceerd. Ik wil hier met een leuk voorbeeld laten zien hoe nuttig wiskunde kan zijn in het voorkomen van denkfouten. Ik ga het niet toepassen op je eigen vak; dat mag je zelf doen als je daar zin in hebt!

1 Probleemstelling

Kun je, redenerend vanuit gewone natuurkunde, aantonen dat een spiegel links en rechts verwisselt? Dit is een ‘feit’ dat je kent uit de dagelijkse praktijk en je bent geneigd meteen ‘ja’ te zeggen, maar het is nog knap lastig om dat rond te krijgen als je het precies wilt doen. Dat komt doordat het antwoord eigenlijk luidt dat een spiegel *niet* links en rechts verwisselt!

Een wiskundeboek of -dictaat zou natuurlijk niet zo bedrieglijk beginnen; het zou nog eens prettig leesbaar kunnen worden! Ik zal meteen de clue weggeven en daarna pas datgene doen wat de wiskundedictaten vaak *alleen maar* doen: bewijzen dat het is zoals ik zeg.

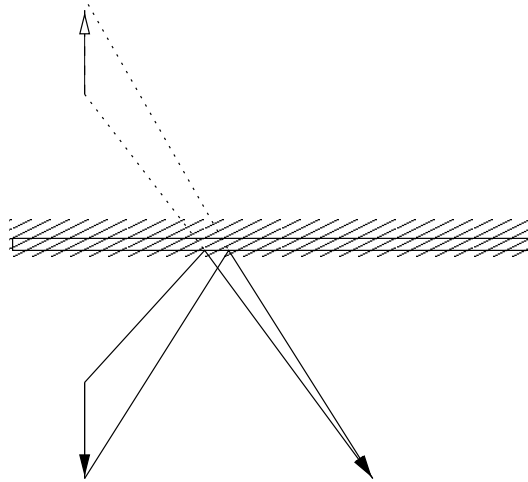
De oplossing ligt erin dat een spiegel vaak links en rechts *lijkt* te verwisselen, maar eigenlijk worden voor en achter verwisseld. Maar dan nog, het is aardig wat werk te bewijzen wat het verband nu precies is met voor en achter verwisselen.

2 Bewijs

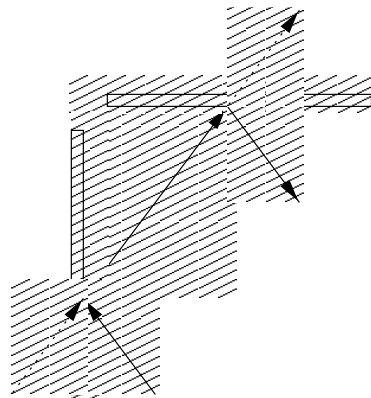
Lemma 1. Een spiegel verwisselt voor- en achterkant.

Bewijs. In de natuurkunde heb je geleerd dat een spiegel een lichtstraal zo weerkaatst, dat hij lijkt te komen van achter de spiegel, zoals in figuur ???. Hier zie je een denkbeeldig object achter de spiegel, waarbij voor- en achterkant omgekeerd schijnen te zijn.

Merk op dat we geen formules hebben gebruikt, maar dat er toch niet aan de conclusie valt te ontkomen. Daarmee is het bewijs in ieder geval *formeel*.



Figuur 1: Spiegelbeeld lijkt zich achter spiegel te bevinden.



Figuur 2: Dubbele reflectie is geen reflectie.

Lemma 2. Als je een object tweemaal spiegelt, dan is het originele object terug, modulo rotatie en translatie.

Bewijs. Wanneer je twee spiegels tekent en daarin lichtbanen zoals getrokken in figuur ??, dan kun je ook een schijnlichtbaan tekenen die recht verloopt, zoals met de onderbroken strepen is aangegeven — of een spiegelbeeld ervan, maar het blijft een rechte lijn. Omdat dit voor elke lichtstraal te doen is, ongeacht de hoek tussen de spiegels, zal in het algemeen een tweemaal gespiegeld object verplaatst en eventueel geroteerd (bij andere hoeken dan 90 graden) schijnen maar zeker *niet* gespiegeld.

Soms is de wiskunde niet bij machte, of vindt men het te triviaal, of is het te zeer een punt van overtuiging, om een bepaalde eigenschap te bewijzen. In zo'n geval wordt die eigenschap weleens als aanname opgevoerd. Dat zullen we hier ook doen.

Aanname 1. Een menselijk lichaam is symmetrisch in de links/rechts richting.

Noot: Symmetrie in een richting wil zeggen, dat spiegelen in die richting onopgemerkt blijft.

We kunnen nu de hoofdstelling formuleren.

Stelling. Een spiegel lijkt links en rechts van een mensenlichaam te verwisselen.

Bewijs. Uit lemma 1 leren we dat een spiegel voor en achter van een mensenlichaam verwisselt. Aangezien een mensenlichaam volgens aanname 1 symmetrisch is in de links/rechts richting, is een links/rechts spiegeling niet waarneembaar, ofwel kan naar wens aan een beeld worden toegedicht.

Wanneer we inderdaad een links/rechts verwisseling toedichten aan het mensenlichaam dat we zien in de spiegel, dan is er tweemaal gespiegeld en dus (lemma 2) is er weer een ongespiegeld mensenlichaam terug.

We kunnen dus straffeloos stellen dat een spiegel links en rechts verwisselt van een mensenlichaam.

3 Nut en toepasbaarheid van wiskunde

Doordat ik een precies bewijs heb geleverd, heb ik een denkfout ondervangen. Ik ben gedwongen geweest om rechtlijnig van kennis naar conclusie te redeneren, en dat kon alleen door mijn denkwijze te corrigeren; de wiskunde heeft me hier dus behoed voor een denkfout.

Iets anders wat we zien in dit voorbeeld, is dat de wiskunde het mogelijk maakt precies te zijn in abstractieniveau (toepassingsbereik) van een stelling. De stelling ging over mensenlichamen, en niet over bijvoorbeeld een telefoontoestel, want dat heeft geen as van symmetrie zoals een mensenlichaam dat heeft. Ik moest een extra aanname in die richting maken om het bewijs te voltooien, en dat helpt om te beseffen op welk bereik van toepassingen inzichten (of stellingen) geldig zijn.

Verder kan iedereen dit voorbeeld napluizen en tot dezelfde conclusie komen; doordat de aannames uitgeschreven staan en het geheel verder strak doorgeredeneerd is, is er geen speld tussen te krijgen. (toch?) Wiskunde is er om precies te zijn, en omdat woorden misleidend kunnen zijn is het ideaal om een ondubbelzinnige notatie (kriebels, en lettertjes, bij voorkeur uit het Griekse alfabet) te gebruiken.

Wanneer wil je in je eigen werk wiskunde gebruiken? Je hebt uit dit voorbeeld ook wel opgemaakt dat het lastig (en vervelend) is om bewijzen te leveren, zelfs als je intuïtie al erg sterk in een richting wijst. In het algemeen denk ik dat wiskunde bijzonder nuttig is om dingen vast te pinnen die al enige tijd in zwang zijn, maar ik denk dat het minder ideaal is om wiskunde in te zetten bij pionierswerk in een nieuw vakgebied of toepassingsgebied. Het is een afweging; ik denk dat *overal* wiskunde voor gebruiken even slecht is als het *nergens* voor gebruiken.

Ik heb in dit artikel ook willen laten zien dat wiskunde niet per sé bestaat om studenten het leven zuur te maken. Het is toepasbaar, alleen om de een of andere reden kiezen wiskundedocenten ervoor dat geheim te bewaren bij hun

vakken... Vraag er dus gewoon om als je een 'gek' concept voorgeschoteld krijgt, en je zult zien dat het vak leuker wordt. Nul-elementen uit de algebra zijn nuttig om in te zien hoe programma's zich in uitzonderlijke situaties moeten gedragen. Lineaire algebra wordt toegepast om de stand van robotarmen te bepalen. Grafentheorie vind je overal en nergens terug, bijvoorbeeld als program flow beschrijving in compilers. Zoek (met hulp van je wiskunde-docent) actief naar zulke toepassingen, want als je toepassingen ziet is wiskunde domweg hardstikke *cool*.